4Ф

УДК 681.3

Л.П. Фельдман
Донецкий национальный технический университет, Украина
feldman@r5.dgtu.donetsk.ua

Устойчивые одношаговые блочные методы численного решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений

В статье предложены устойчивые одношаговые блочные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы обладают высокими характеристиками устойчивости, что позволяет применять их для решения жестких задач, и легко отображаются на параллельные структуры произвольной архитектуры.

Статья содержит обобщение результатов исследований [1-5], посвященных устойчивости традиционных последовательных методов численного решения задачи Коши жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений и является продолжением ранее опубликованных работ [6-9]. В ней рассматривается устойчивость параллельных численных методов решения задачи Коши жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Предлагаемые блочные одношаговые многоточечные разностные схемы обладают высокой точностью, легко распараллеливаются и жестко устойчивы.

Постановка задачи

1. Рассматривается устойчивость решения задачи Коши жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right), t > t_0, x(t_0) = x_o \tag{1}$$

одношаговым многоточечным методом, определяемым формулой:

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau\left[b_i f_{n,0} + \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} f_{n,j}\right],\ i = \overline{1,k},\ n = \overline{1,N}. \tag{2}$$

При исследовании устойчивости блочных разностных методов для жестких систем уравнений, так же, как и для классических методов, обычно рассматривают модельное уравнение (3)

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \tag{3}$$

где λ – произвольное комплексное число. Свойства различных методов анализируют на примере модельного уравнения (3).

Для модельного уравнения (3) разностные уравнения (2) примут вид

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \lambda\phi\left[b_i u_{n,0} + \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} u_{n,j}\right],\ i = \overline{1,k},\ n = \overline{1,N}. \quad (4)$$

Обозначим матрицу коэффициентов и вектор-столбец системы уравнений (2) через

$$A = (a_{i,j}),\ \overline{b} = (b_i)^T,\ i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,k}.$$

Представим систему уравнений (3) в векторной форме. Для этого введем векторы

$$U_n = (u_{n,j}),\ \overline{e} = (1,1,...,1)^T.$$

В векторной форме уравнение (3) будет иметь вид

$$(E - \mu A)U_n = u_{n,0}(\overline{e} + \mu\overline{b}), \mu = \lambda\tau. \quad (5)$$

Определив из (5) U_n, получим

$$U_n = (E - \mu A)^{-1}(\overline{e} + \mu\overline{b})u_{n,0} = \overline{s}u_{n,0}, \quad (6)$$

где вектор $\overline{s}$ определяется выражением

$$\overline{s} = (E - \mu A)^{-1}(\overline{e} + \mu\overline{b}), \quad (7)$$

или

$$\overline{s} = \begin{bmatrix} 1-\mu a_{1,1}, & -\mu a_{1,2}, -\mu a_{1,3},...,-\mu a_{1,k} \\ -\mu a_{2,1}, & 1-\mu a_{2,2}, -\mu a_{2,3},...,-\mu a_{2,k} \\ \dots & \dots \\ -\mu a_{k,1} & -\mu a_{k,2}, -\mu a_{k,3},...,1-\mu a_{k,k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1+\mu b_1 \\ 1+\mu b_2 \\ \dots \\ 1+\mu b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ .. \\ s_k \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Определим матрицу перехода от блока значений $U_{n-1} = (u_{n-1,1}, u_{n-1,2,...,u_{n-1,k}})$ к блоку U_{n+1}. Для этого преобразуем полученную систему вида (6) к эквивалентной системе

$$S = \begin{bmatrix} 0,0,....,0,s_1 \\ 0,0,....,0,s_2 \\ \dots \\ 0,0,....,0,s_k \end{bmatrix},\ U_n = SU_{n-1}, n = 1,... \quad (9)$$

Таким образом, устойчивость численного метода (2) определяется собственными значениями матрицы S [2]. Видно, что элементы этой матрицы являются рациональными функциями от μ и собственные значения q матрицы S также будут зависеть от μ. Поэтому необходимо найти те области для собственных значений μ, в которых $|q(\mu)| \le 1$.

По виду матрицы $\widetilde{S}$ можно заключить, что она имеет $k - 1$ нулевых собственных чисел $q_1 = q_2 = ... = q_{k-1} = 0$ и $q_k = \widehat{s}_k$. Поскольку ранг матрицы равен единице, каждому собственному значению соответствуют различные ненулевые собственные векторы. Таким образом, функцией устойчивости метода (1) является

$$q_k(\mu) = s_k. \quad (10)$$

Из (7) следует, что

$$s_k = \frac{Det[A_k]}{Det[E-\mu A]},\ A_k = \begin{bmatrix} 1-\mu a_{1,1},\ -\mu a_{1,2}, -\mu a_{1,3},...,1+\mu b_1 \\ -\mu a_{2,1,}\ 1-\mu a_{2,2}, -\mu a_{2,3},...,1+\mu b_2 \\ .... \\ -\mu a_{k,1}\ \ -\mu a_{k,2}, -\mu a_{k,3},...,\ 1+\mu b_k \end{bmatrix} \tag{11}$$

Матрица S имеет четыре ненулевых собственных вектора. Найдем область действительных значений μ, для которых $|q_4[\mu]| \le 1$.

$$q_4 = \frac{60 + 120\ m + 105\ m^2 + 50\ m^3 + 12\ m^4}{60 - 120\ m + 105\ m^2 - 50\ m^3 + 12\ m^4}$$

В последнем выражении модули числителя и знаменателя равны, следовательно, на мнимой оси $|q_4[i\alpha]| = 1$. Поэтому областью устойчивости метода является вся левая полуплоскость, включая и мнимую ось. Таким образом, одношаговый четырехточечный блочный метод A-устойчив.

Проще определять функцию устойчивости, используя формулу (11).

Определитель матрицы $E - \mu A$ будет равен:

$$\mathrm{Det[E\text{-}\mu A]} = 1\text{-}4\mu + 7.58333\mu^2 - 9\mu^3 + 7.42361\mu^4 - 4.45\mu^5 + 1.95311\mu^6 - 0.603968\mu^7 + 0.11111\mu^8.$$

Заменим в матрице $E - \mu A$ последний столбец вектором b, получим матрицу A_k. Найдем ее определитель

$$\mathrm{Det[A_k]} = 1 + 4\mu + 7.58333\mu^2 + 9\mu^3 + 7.42361\mu^4 + 4.45\mu^5 + 1.95311\mu^6 + 0.603968\mu^7 + 0.11111\mu^8.$$

Таким образом, функция устойчивости метода будет равна

$$q_8[\mu] = \frac{1 + 4\mu + 7.58333\mu^2 + 9\mu^3 + 7.42361\mu^4 + 4.45\mu^5 + 1.95311\mu^6 + 0.603968\mu^7 + 0.11111\mu^8}{1\text{-}4\mu + 7.58333\mu^2 - 9\mu^3 + 7.42361\mu^4 - 4.45\mu^5 + 1.95311\mu^6 - 0.603968\mu^7 + 0.11111\mu^8}.$$

В рассмотренном примере модули числителя и знаменателя равны, следовательно, на мнимой оси $|q_8[i\alpha]| = 1$. Поэтому областью устойчивости метода является вся левая полуплоскость, включая и мнимую ось. Таким образом, одношаговый восьмиточечный блочный метод также A-устойчив. Очевидно, что одношаговые многоточечные блочные методы более высоких порядков также будут A-устойчивыми.

Рассмотрим пример использования одношаговых многоточечных блочных методов. Типичным примером жесткой задачи является уравнение Ван-дер-Поля. Его можно записать в виде системы:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= -\alpha(x_2(x_1^2 - 1) + x_1) \end{aligned} \tag{12}$$

Для расчетов положим $\alpha = 100,\ x_1 = 2,\ x_2 = 0$.

Построим графики полученных решений:

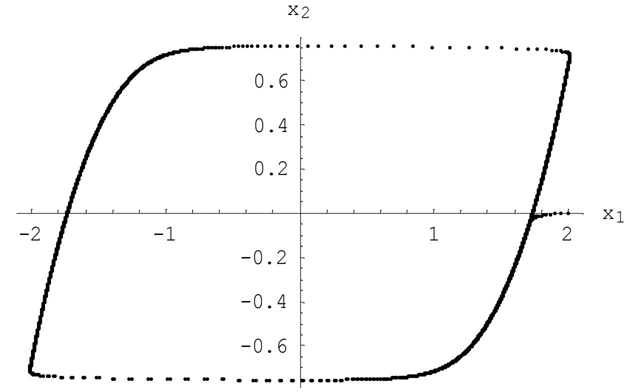


Рисунок 1 – Фазовая траектория (предельный цикл) решения задачи

Полученное решение свидетельствует о возможности решения жестких задач блочными одношаговыми многоточечными методами. На рис. 1 видна переходная зона от начального положения к предельному циклу. Ее так же можно получить по приведенной программе. На рис. 2 приведена переходная фаза, полученная с меньшим шагом интегрирования.

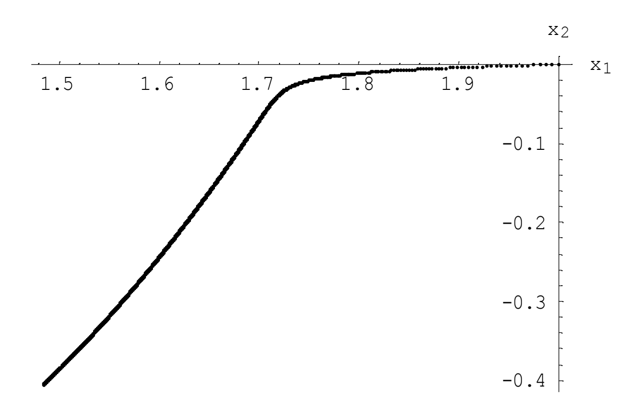


Рисунок 2 – Переходная фаза решения задачи (12)

Заключение

На основе проведенного анализа параллельных разностных методов можно сделать вывод, что одношаговые многоточечные разностные (1) методы являются *A*-устойчивыми. Таким образом, эти методы могут использоваться при численном решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенная методика может быть использована при исследовании устойчивости параллельных одношаговых методов с любым числом точек в блоке. Проведенные численные решения одношаговыми блочными методами тестовых жестких систем практически подтвердили их надежность и эффективность.

Литература

1. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
2. Системы параллельной обработки / Под ред. Д. Ивенса. – М.: Мир,1985. – 416 с.
3. Хайрер Э., Нёрсет С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

4. Хайрер Э., Ваннер. Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
5. Молчанов И.Н. Введение в алгоритмы параллельных вычислений. – Киев: Наукова думка, 1990. – 128 с.
6. Фельдман Л.П. Устойчивость параллельных методов численного моделирования динамических систем с сосредоточенными параметрами / Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. – Донецьк: ДонНТУ, 2002. – Вип. 39. – С. 8-13.
7. Фельдман Л.П., Дмитриева О.А. Анализ устойчивости параллельных методов численного решения жестких систем // Тезисы докладов IV Междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2002) / XIX Междунар. семинара по струйным, отрывным и нестационарным течениям. – Санкт-Петербург. – 2002. – М.: Изд-во МАИ, 2002. – 486 с.
8. Фельдман Л.П. Устойчивость параллельных блочных методов численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Тезисы докладов XII Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. – Владимир. – 2003. – М.: Изд-во МАИ, 2003. – Том 2. – С. 617-618.
9. Feldman L., Svjatnyj V., Dmitriewa O.A. Stabilitat von parallelen Simulationsverfahren fur dynamische Systeme mit konzentrierten Parametern /Simulationstechnik, 17. Symposium // SCS-Europe BVBA (ISBN 3-936150-27-3). – Magdeburg (Germany). – 2003. – P. 105-110.

Л.П. Фельдман

Стійкі однокрокові блокові методи чисельного розв’язання жорстких звичайних диференціальних рівнянь

У статті запропоновано стійкі однокрокові блокові методи розв’язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь. Методи мають високі характеристики стійкості, що дозволяє розв’язувати жорсткі задачі та легко відображаються на паралельні структури довільної архітектури.

L.P. Feldman

Stable One-step Block Methods of Numeral Decision of Stiff Ordinary Differential Equations

Stable one-step block methods of numeral decision of Cauchy’s problem for systems of ordinary differential equations are offered. Methods possess high descriptions of stability, that allows to apply them for the decision of stiff tasks and easily represented on the parallel structures of arbitrary architecture.

Статья поступила в редакцию 10.07.2008.